Quadratisches Ergänzen

ALTERNATIVE

❷ Bestimme mit Hilfe der quadratischen Ergänzung den maximalen bzw. minimalen Flächeninhalt.

Beispiel:

$A(x) = 2x^2 - 12x + 22$

$A(x) = 2 \cdot [\, x^2 - 6x + 11]$

$A(x) = 2 \cdot [\, \underbrace{x^2 - 6x + 3^2} - 3^2 + 11\,]$

$A(x) = 2 \cdot [\, (x-3)^2 \quad - 9 \; + 11\,]$

$A(x) = 2 \cdot [\, (x-3)^2 \quad + 2\,]$

$A(x) = 2 \cdot (x-3)^2 + 4$

$\Rightarrow A_{min} = 4 \quad \text{wenn } x = 3$

Hier wie versprochen die Lösungen für Lehrkräfte und Schüler/-innen, die die Variante bevorzugen, bei der die eckige Klammer direkt nach dem „einfachen x" geschlossen wird.

$A(x) = 2x^2 - 12x + 22$
$= 2[x^2 - 6x] + 22$
$= 2[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2] + 22$
$= \ldots$

a) $A(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$= 3[x^2 - 2x] + 9$

$= 3[\underbrace{x^2 - 2x + \mathbf{1^2}} - \mathbf{1^2}] + 9$

$= 3[(x-1)^2 - 1] + 9$

$= 3(x-1)^2 - 3 + 9$

$= 3(x-1)^2 + 6$

$\Rightarrow A_{min} = 6 \quad \text{für} \quad x = 1$

b) $A(x) = 2x^2 + 4x + 2{,}5$

$= 2[x^2 + 2x] + 2{,}5$

$= 2[(\underbrace{x^2 + 2x + \mathbf{1^2}} - \mathbf{1^2}] + 2{,}5$

$= 2[(x+1)^2 - 1] + 2{,}5$

$= 2(x+1)^2 - 2 + 2{,}5$

$= 2(x+1)^2 + 0{,}5$

$\Rightarrow A_{min} = 0{,}5 \quad \text{für} \quad x = -1$

c) $A(x) = -2x^2 + 12x - 8$

$= -2[x^2 - 6x] - 8$

$= -2[\underbrace{x^2 - 6x + \mathbf{3^2}} - \mathbf{3^2}\,] - 8$

$= -2[(x-3)^2 - 9] - 8$

$= -2(x-3)^2 + 18 - 8$

$= -2(x-3)^2 + 10$

$\Rightarrow A_{max} = 10 \quad \text{für} \quad x = 3$

d) $A(x) = -3x^2 - 12x + 6$

$= -3[x^2 + 4x] + 6$

$= -3[\underbrace{x^2 + 4x + \mathbf{2^2}} - \mathbf{2^2}] + 6$

$= -3[(x+2)^2 - 4] + 6$

$= -3(x+2)^2 + 12 + 6$

$= -3(x+2)^2 + 18$

$\Rightarrow A_{max} = 18 \quad \text{für} \quad x = -2$

Lösungen: $A_{min} = 6$ für $x = 1$ • $A_{max} = 10$ für $x = 3$ • $A_{min} = 0{,}5$ für $x = -1$ • $A_{max} = 18$ für $x = -2$